

METODE ELEMEN HINGGA UNTUK PENYELESAIAN NUMERIK PADA RADIASI ELEKTROMAGNETIK ANTENA DIPOL

Sukandar

Program Studi Sistem Teknik Elektro Fakultas Teknik Universitas Sultan Fatah (UNISFAT)
Jl. Sultan Fatah No. 83 Demak Telpn (0291) 681024

Abstraksi : Pengukuran daya pancaran (radiasi) antena perlu dilakukan untuk meyakinkan bahwa pengaruhnya aman bagi lingkungan sekitarnya sesuai dengan petunjuk IEEE. Salah satu cara untuk mengukur daya radiasi dari suatu antena adalah dengan pemodelan dengan menggunakan analisa perhitungan secara numerik. Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah metode elemen hingga atau yang lebih dikenal sebagai FEM (*Finite-element Method*).

Penelitian ini terbatas masalah pemodelan jarak yang relatif aman dari radiasi elektromagnetik pada antena terutama pemodelan menggunakan metode *finit elemen* (FE) dan komputasi menggunakan program MATLAB. Sebagai acuan jarak aman dari radiasi elektromagnetik yang dipakai adalah rekomendasi standar IEEE mengenai jarak aman pemaparan manusia terhadap medan elektromagnetik.

Hasil penelitian Metode Elemen Hingga untuk penyelesaian numerik pada radiasi elektromagnetik cara kerjanya mirip dengan aliran radiasi panas pada bahan. Hasil secara riil belum dapat digambarkan secara jelas dan nyata karena masih ada beberapa parameter yang belum tepat. Pemodelan yang ada masih terbatas pada sistem statis frekuensi rendah, untuk frekuensi tinggi masih memerlukan penentuan domain agar pred

Kata kunci : Metode Elemen Hingga (*Finit Element Methode*), Numerik, Radiasi, Elektromagnetik, Antena Dipol

PENDAHULUAN

Manusia telah menjadi subyek radiasi elektromagnetik sejak awal zaman. Dahulu, radiasi elektromagnetik (EM) hanya berasal dari sumber alam seperti matahari dan badai. Sekarang ada banyak tambahan radiasi EM dari sumber buatan. Pada ujung bawah spektrum frekuensi (60 atau 50 Hz) terdapat medan EM yang dibangkitkan oleh saluran dan beberapa peralatan besar maupun kecil. Pada ujung atas terdapat radiasi nuklir yang terdiri dari sinar gamma dan sinar-X. di tengah-tengah terdapat frekuensi radio (RF) gelombang EM yang membawa apa saja dari radio AM dan FM dan saluran televisi, radio CB, telepon selular dan cordless juga peralatan komunikasi

personal. Istilah RF adalah bahasa yang digunakan untuk menggambarkan jangkauan frekuensi antara beberapa kilohertz sampai beberapa ratus gigahertz. Oleh karena itu, radar untuk kontrol lalu lintas udara atau untuk mengawasi kecepatan mobil, oven microwave, komputer, dan perangkat elektronik yang lain juga meradiasikan gelombang EM RF, meskipun mereka tidak berhubungan dengan radio.

Gelombang elektromagnetik energi sangat tinggi, seperti sinar gamma atau sinar-X, disebut radiasi ionisasi karena mereka mengionisasi molekul dalam jalur mereka. Pemaparan yang tak terkendali dari gelombang ini dalam jumlah besar diketahui sebagai penyebab penyakit dan bahkan kematian bagi

manusia. Bagaimanapun, radiasi alamiah dari matahari dan sumber kehidupan di bumi, dan radiasi buatan yang terkendali telah digunakan untuk keperluan medis demi melindungi kehidupan.

Efek biologis gelombang elektromagnetik RF non-ionisasi tidak diketahui dengan baik pada saat ini, walaupun telah dilakukan beberapa penyelidikan. Tidak ada bukti bahwa pemaparan terhadap medan EM frekuensi rendah dari saluran transmisi akan menyebabkan beberapa penyakit. Bagaimanapun, beberapa studi telah menemukan hubungan statistik yang lemah antara kejadian leukimia dengan pemaparan pada waktu yang lama pada saluran transmisi daya. Untuk pemaparan manusia terhadap medan elektromagnetik RF, IEEE telah mengusulkan batas aman berdasarkan studi lebih dari delapan tahun oleh lebih dari 100 insinyur, ahli fisika dan periset kanker. (Fischetti, 1993:43). Pada frekuensi lebih besar dari 100 MHz, batas pemaparan manusia adalah bagian kerapatan daya, atau besar vektor poynting rata-rata waktu. Pada frekuensi rendah, batas dinyatakan sebagai bagian yang terpisah dari medan E dan medan H , karena tiap medan mempunyai perbedaan efek biologis.

Manusia telah menemukan peralatan yang menghasilkan energi elektromagnetik untuk komunikasi, sensor dan deteksi, serta keperluan yang

lain. Apapun tujuannya, sebuah sistem harus mentransmisikan energi elektromagnetik dalam cara yang diinginkan. Saluran transmisi dan pemadu gelombang (*waveguides*) adalah contoh dari sistem tersebut. Cara lain untuk mentransmisikan energi elektromagnetik adalah dengan mengirimkan melalui udara, seperti pada siaran radio dan televisi, atau dengan hubungan microwave titik ke titik.

Penaksiran medan listrik dan medan magnet dalam suatu sistem elektromagnetik sangat penting untuk efisiensi desain. Contohnya untuk mengisolasi peralatan, mengisolasi konduktor dari sistem lain yang diinginkan dengan tujuan menjaga intensitas sistem agar medan listrik tetap berada dibawah tegangan tembus dari medium isolasi. Pada saklar magnetik, intensitas medan magnet harus menghasilkan daya yang cukup untuk mengaktifkan saklar. Dan untuk efisiensi desain dari sistem transmisi, seperti pada antena, pengetahuan mengenai distribusi medan elektromagnetik dalam medium di sekitar antena jelas sangat diperlukan terutama untuk keamanan benda-benda dan mahluk hidup disekitarnya.

Medan elektromagnetik dianalisa mulai dari perumusan secara matematis permasalahan yang ada. Pada sistem elektromagnetik persamaan yang sering dipakai adalah persamaan Laplace atau Poisson untuk pemodelan sistem yang

statis dan quasistatis (frekuensi rendah) kondisi operasinya. Pemodelan pada kondisi frekuensi tinggi menggunakan penyelesaian persamaan gelombang pada domain waktu atau domain frekuensi agar prediksi medan listrik dan medan magnet bisa lebih tepat. (Guru, 1998:511) Pada beberapa kasus, penyelesaian persamaan diferensial parsial untuk kondisi terbatas diperlukan untuk mendapatkan medan listrik dan medan magnet disekitar sistem elektromagnet. Solusi analitik hanya bisa didapatkan dari bentuk geometri yang tetap misal berbentuk empat persegi panjang, lingkaran atau lainnya yang memiliki kondisi batas sederhana.

Sampai tahun 1990, penggunaan teknik dalam kawasan frekuensi untuk pemodelan di bidang teknik yang menyangkut gelombang elektromagnetik sangat dominan (Yang, 1998). Dengan teknik ini, sistem persamaan dimanipulasi sehingga terbentuk sistem persamaan skalar yang terpisah dan bisa diselesaikan sendiri-sendiri tanpa melibatkan komponen lainnya (persamaan untuk komponen medan listrik dan medan magnet dapat dipisah). Metode komputasi yang sering dipakai adalah metode beda hingga (*finite-difference method* FDM) metode elemen hingga (*finite-element method*. FEM) dan metode momen (*method of moments*. MoM) (Guru, 1998:511).

Konsep dasar dari element hingga adalah membagi-bagi suatu kontinum menjadi beberapa bagian yang lebih kecil, bagian-bagian yang kecil inilah yang disebut elemen hingga. Proses pembagian suatu kontinum menjadi elemen-elemen hingga ini dikenal sebagai 'diskretisasi' (pembagian). Dinamakan elemen hingga karena ukuran elemen-elemen kecil ini terhingga (bukannya kecil tidak berhingga). Dan biasanya memiliki bentuk geometri yang lebih sederhana dibandingkan dengan kontinumnya. (Weaver, 1993: 1)

Metode elemen hingga pertama kali dikembangkan untuk analisis struktur untuk mengevaluasi tegangan dan regangan dari struktur yang kompleks misalnya jembatan atau bangunan gedung. Pendekatan klasik analisis struktur (benda pejal) membutuhkan suatu fungsi tegangan atau fungsi peralihan yang harus memenuhi persamaan diferensial keseimbangan, hubungan tegangan regangan, dan kontabilitas pada setiap titik dalam kontinum, termasuk syarat-syarat batasnya (*boundaries*). Pendekatan lain yang bisa digunakan adalah dengan metode beda hingga (*finite difference*), tapi metode ini memiliki kerugian yaitu syarat-syarat batasnya susah dipenuhi dan akurasi dari perhitungan rendah (Weaver, 1993: 2). Sebaliknya, pendekatan dengan metode elemen

hingga merupakan suatu analisis pendekatan yang berdasarkan asumsi tegangan, bahkan dapat juga berdasarkan kombinasi dari kedua asumsi tadi dalam setiap elemennya.

Yee pada tahun 1966 (Hockanson, 1994) mengusulkan penggunaan metode beda hingga dengan komponen medan listrik dan komponen medan magnet diletakkan pada tempat yang berbeda (*staggered grid*). Dengan cara ini kekekalan medan listrik dan medan magnet terpenuhi (*divergent free*), metode ini kemudian terkenal dengan nama : *Finite Difference Time Domain* (FDTD). Perkembangan metode FDTD relatif lambat karena penggunaan *staggered grid* menyebabkan *coding* sulit dilakukan dan bentuk kawasan ruang (*spatial domain*) yang dianalisis terbatas pada bentuk kotak.

Metode pendekatan dengan elemen hingga Taylor-galerkin atau disebut juga *Taylor Weak Statement* (TWS) biasa dipakai untuk persamaan advection-diffusion, persamaan Burgers, dan persamaan Navier-Stokes. Metode elemen hingga (FEM) juga merupakan integrasi lokal dari sistem persamaan diferensial, tapi pada dasarnya adalah konsep dari meminimalkan kesalahan (*error minimization*) untuk menciptakan suatu pendekatan yang paling baik atau optimum. FEM dapat dipakai pada geometri non-Cartesian dan juga fleksibel dipakai untuk kondisi batas. Secara

umum formulasi matematika ini menghasilkan kesalahan pengukuran yang menyerupai metode volume hingga [*finite volume methods*, (FVM)] pada kasus-kasus tertentu. (Chaffin, 1997: 1)

Dari latar belakang diatas, pengukuran daya pancaran (radiasi) antenna perlu dilakukan untuk meyakinkan bahwa pengaruhnya aman bagi lingkungan sekitarnya sesuai dengan petunjuk IEEE. Salah satu cara untuk mengukur daya radiasi dari suatu antenna adalah dengan pemodelan dengan menggunakan analisa perhitungan secara numerik. Metode yang digunakan pada penelitian ini adalah metode elemen hingga atau yang lebih dikenal sebagai FEM (*Finite-element Method*). Gagasan ini muncul karena maraknya penggunaan alat komunikasi yang menggunakan antenna dan kekhawatiran sebagian masyarakat akan dampak medan radiasi elektromagnetik terhadap kesehatan manusia terutama pengguna telepon selular. Dan sampai saat ini penulis belum menemukan karya ilmiah yang membahas masalah pemodelan jarak yang relatif aman dari radiasi elektromagnetik pada antenna terutama pemodelan menggunakan metode *finite element* (FE) dan komputasi menggunakan program MATLAB. Sebagai acuan jarak aman dari radiasi elektromagnetik yang dipakai adalah rekomendasi standar IEEE mengenai

jarak aman pemaparan manusia terhadap medan elektromagnetik.

TUJUAN PENELITIAN

Tujuan penelitian ini adalah mempelajari penyelesaian persamaan Maxwell pada antena dengan pendekatan metode elemen hingga atau *Finit Element Methode* (FEM). Metode elemen hingga yang digunakan pada penelitian ini dipakai untuk memperkirakan kerapatan pancaran daya radiasi elektromagnetik dari antena.

Setelah komputasi selesai diharapkan dapat memberikan gambaran jarak yang aman dari medan radiasi elektromagnetik antena sesuai dengan petunjuk keamanan IEEE.

TINJAUAN PUSTAKA

Persamaan Maxwell memberi peluang untuk memperoleh suatu penyelesaian perhitungan pada medan elektromagnetik. Medan elektromagnet memerlukan sumber muatan dan arus yang bervariasi terhadap waktu. Ketika medan yang terjadi akibat sumber itu dibatasi penyebarannya seperti gelombang sepanjang jalur transmisi atau dalam pemandu gelombang (*waveguide*), gelombang tersebut biasanya dikenal dengan gelombang yang dipandu (*guided wave*). Bila sumber tersebut terbatas ukurannya, menghasilkan gelombang yang disebarkan secara bebas dari sumber

tersebut ke medium yang tidak terbatas, secara kolektif disebut bentuk sistem yang diradiasikan (*radiating sistem*)(Guru, 1998 : 473)

Hockanson (1994) mengembangkan metode beda hingga dengan domain waktu (*Finit Difference Time-Domain*) dipakai untuk perhitungan elektromagnetik. Metode ini mendiskritasi hukum Faraday dan hukum Ampere secara langsung. Prosedure diskritisasinya dibentuk dari persamaan *Curl* Maxwell atau persamaan integralnya. Metode yang dipakai berasal dari tata cara diskritisasi persamaan *Curl* yang dilakukan oleh Yee (1966)

LANDASAN TEORI

Persamaan Maxwell

Pemahaman dan penerapan listrik dan magnet merupakan hal yang sangat penting dalam kehidupan masyarakat modern., Teori elektromagnetik yang dikembangkan oleh Maxwell (1864) merupakan hal yang sangat fundamental karena teori tersebut mendasari pengembangan dan inovasi yang dilakukan oleh rekayasawan elektro. Maxwell menyatakan teorinya dalam 4 persamaan (Guru, 1998 : 474)

1. Hukum induksi Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \dots\dots\dots (1)$$

2. Hukum Ampere

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (2)$$

3. Hukum Gauss untuk medan listrik

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_v \quad \dots\dots\dots (3)$$

4. Hukum Gauss untuk medan magnet

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

dimana :

E : kuat medan listrik (volt per meter)

D : kerapatan fluks listrik (coulomb per meter persegi)

H : kuat medan magnet (ampere per meter)

J : kerapatan arus listrik (ampere per meter persegi)

ρ_v : rapat muatan listrik (coulomb per meter persegi)

Persamaan Medan elektromagnetik diatas merupakan sumber pembangkit medan elektromagnetik. Persamaan (1) sampai (4) mengungkapkan hukum fisik yang melingkupi medan E , H dan sumber J dan ρ_v pada setiap titik diruang setiap saat.

Persamaan pertama Maxwell adalah hukum induksi Faraday, yang ditemukan secara eksperimen oleh Michael Faraday (1791-1867). Persamaan kedua Maxwell merujuk pada hukum Ampere, meskipun hukum asli dari Andre Marie Ampere (1775-1836) tidak berisi bagian arus perpindahan (*displacement current*) ($\partial D/\partial t$). James Clerck Maxwell (1831-1879) pertama-tama mengusulkan tambahan bagian ini

ke **arus konduksi** atau **konveksi J** dalam hukum ampere. Bagian ini dianggap penting karena memungkinkan peramalan keberadaan gelombang elektromagnetik. Keberadaannya kemudian didemonstrasikan oleh Heinrich Hertz (1857-1894) (C. Susskind, 1968). Persamaan (3) dan persamaan (4) dikenal sebagai hukum Magnetik Gauss dan hukum Listrik Gauss.

Simbul ∇ muncul dalam semua persamaan Maxwel. Simbul ini menggambarkan operator diferensiasi-parsial, operator $\nabla \times A$ disebut **Curl A** dan $\nabla \cdot A$ disebut **divergensi A**. Dalam koordinat rektanguler.

$$A = xAx(x, y, z) + yAy(x, y, z) + zAz(x, y, z)$$

dengan menukar turunan ruang-waktu didapatkan

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

Dengan menggunakan persamaan (3) didapatkan hukum kontinuitas untuk arus dan kerapatan muatan.

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$$

(hukum konservasi dari muatan listrik)
(6)

Persamaan (6) merupakan konsekwensi langsung dari persamaan Maxwell. Dengan asumsi bahwa semua persamaan Maxwell untuk vektor

medan, untuk kerapatan arus \mathbf{J} , dan untuk kerapatan muatan ρ_v adalah sah pada semua waktu dan semua tempat. Artinya jika suku kedua dipindahkan ke ruas kanan dari persamaan (6) didapatkan:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (7)$$

Ruas kiri dari persamaan (7) adalah aliran listrik yang keluar dari suatu volume diferensial dan ruas kanan adalah tingkat penurunan muatan listrik pada volume. Persamaan ini menyatakan bahwa tingkat transfer muatan listrik keluar diferensial volume sama dengan tingkat penurunan total muatan listrik dalam volume. Pernyataan ini menyatakan bahwa muatan bersifat kekal sehingga tidak dapat diciptakan atau dihilangkan. Hukum ini juga sebagai **hukum kekekalan muatan listrik**.

Dengan proses yang sama, perkalian *dot* antara persamaan (1) dengan ∇ akan didapatkan;

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \dots\dots\dots(8)$$

Dinyatakan bahwa $\nabla \cdot \mathbf{B}$ adalah konstan dan tidak tergantung waktu. Hukum Gauss magnet persamaan (4) menyatakan bahwa konstanta ini adalah nol.

Vektor medan elektromagnetik arus listrik dan arus magnet diatas masih merupakan bentuk fungsi real dari ruang dan waktu. Bila difokuskan pada medan harmonik-waktu pada frekwensi tunggal, maka bisa diasumsikan bahwa semua vektor medan dan semua arus juga kerapatan muatan bervariasi secara sinusoidal dengan waktu pada frekuensi angular ω tunggal. Dengan notasi kompleks untuk kuantitas harmonik waktu persamaan Maxwell menjadi;

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mathbf{B} \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\mathbf{D} + \mathbf{J} \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\nabla \times \mathbf{D} = \rho_v \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

Hukum gaya Lorentz menjelaskan aksi gaya pada partikel dengan muatan q ketika bergerak dengan kecepatan v pada medan elektromagnetik yang mempunyai karakteristik \mathbf{E} dan \mathbf{B} :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + v \times \mathbf{B}) \quad \dots\dots\dots (13)$$

Satuan untuk gaya \mathbf{F} adalah Newton, dan satuan untuk muatan q adalah coulomb. Hukum gaya Lorentz adalah penghubung medan elektromagnetik dengan mekanika karena hukum Newton mekanik juga menguasai gaya (Liang, 1987: 31)

Hukum gaya Lorentz dapat dipakai untuk menentukan besar gaya yang akan dialami partikel bermuatan bila memasuki daerah dimana medan elektromagnetik berada. Persamaan yang mendasari persamaan daya diperoleh dari persamaan (1) dan persamaan (2) dengan perkalian *dot* (2) dengan \mathbf{E} dan mengurangkannya dari persamaan (1) setelah sebelumnya dikalikan *dot* dengan \mathbf{H} . penggunaan vektor identitas $\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ didapatkan;

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \quad (14)$$

Dengan menggunakan hubungan konstitutif $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ dan $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ notasi bahwa $\mathbf{H} \cdot (\partial \mathbf{H} / \partial t) = (\partial / \partial t) [(1/2) \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}]$ akan terlihat bahwa persamaan tersebut memiliki satuan Watt/m^3 . bagian $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ dianggap sebagai rugi-rugi ohmik karena \mathbf{J} kerapatan arus dalam A/m^2 dan \mathbf{E} adalah medan listrik V/m . $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ adalah daya hilang persatuan volume dari medan listrik yang menjadi panas.

Bagian $\frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$ didefinisikan sebagai energi listrik yang tersimpan persatuan volume.

$$U_E = \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \quad (\text{energi listrik tersimpan}) \quad \dots \dots \dots (15)$$

Bagian $\frac{1}{2} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}$ didefinisikan sebagai energi magnet yang tersimpan per satuan volume.

$$U_H = \frac{1}{2} \mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} \quad (\text{energi magnet tersimpan}) \quad \dots \dots \dots (16)$$

Daya elektromagnetik per satuan luas digambarkan menggunakan **vektor Poynting**. (Penghargaan untuk ahli fisika Inggris John Henry Poynting (1852-1914)) yaitu:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (\text{vektor Poynting}) \quad \dots (17)$$

Satuan \mathbf{S} adalah watt/m^2 . yang merupakan kerapatan daya.

Untuk mengirimkan gelombang elektromagnetik kedalam suatu medium yang harus diperhatikan adalah arus yang beresilasi dalam medium. Hal ini dapat dilihat pada persamaan Maxwell (9) dan (10). Jika arus \mathbf{J} diketahui, persamaan tersebut dapat diselesaikan untuk \mathbf{E} dan \mathbf{H} . Persamaan maxwell ini juga dapat diselesaikan dengan dua fungsi bantuan yaitu potensial vektor dan skalar \mathbf{A} dan Φ . Langkah pertama medan elektromagnetik dinyatakan dengan fungsi potensial ini, kemudian akan didapatkan persamaan diferensial untuk \mathbf{A} dan Φ , dan selanjutnya dicari penyelesaiannya untuk \mathbf{A} dan Φ , dengan menghitung \mathbf{E} dan \mathbf{H} .

Potensial vektor \mathbf{A} dinyatakan sebagai:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{Definisi dari } \bar{\mathbf{A}}) \quad \dots (18)$$

Persamaan Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ dengan sendirinya divergensi dari curl vektor sama dengan 0.

Substitusi persamaan (18) ke dalam hukum Faraday $\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B}$ menghasilkan:

$$\nabla \times (\mathbf{E} + j\omega \mathbf{A}) = 0 \quad \dots \dots \dots (19)$$

karena persamaan curl gradien skalar sama dengan nol, maka persamaan berikut dipilih untuk menyatakan **potensial skalar Φ** :

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\Phi \text{ (definisi untuk } \Phi) \dots(20)$$

Selanjutnya, dua dari empat persamaan Maxwell dipenuhi. Persamaan (18) tidak secara unik menggambarkan \mathbf{A} . Tinjau $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi$, dimana ψ adalah fungsi skalar; kemudian, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}'$. sehingga \mathbf{A} dan \mathbf{A}' keduanya memberikan \mathbf{B} yang sama. Untuk menyatakan \mathbf{A} secara unik, perlu juga menentukan $\nabla \cdot \mathbf{A}$ dengan menggunakan kondisi lorentz:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\epsilon\Phi = 0 \text{ (kondisi Lorentz)..(21)}$$

Kondisi Lorentz dipilih menurut prinsip relativitas. (J. A. Kong, *Teory of Elektromagnetic Waves, New York: Willey 1975*) Substitusi persamaan (18) dan (20) dalam persamaan (11) menghasilkan :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = j\omega\mu\epsilon(-j\omega\mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A})$$

Dengan memperhatikan vektor identitas $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ dan menerapkan kondisi lorentz (21), didapatkan:

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \omega^2 \mu\epsilon \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \text{ (persamaan diferensial untuk } \mathbf{A}) \dots\dots\dots (22)$$

Pendekaan Metode Finite Element

Metode elemen hingga merupakan salah satu prosedur numerik untuk mencari solusi dari beberapa masalah perhitungan fisik dalam analisis

keteknikan dengan persamaan diferensial atau dengan integral. Menurut Segerlind (1984:11), FEM mempunyai dua karakteristik perbedaan dari prosedur numerik yang lain yaitu:

- a. Menggunakan metode formulasi integral untuk membangkitkan sistem pada persamaan aljabar.
- b. Metode yang dipakai adalah fungsi kontinu tiap bagian untuk mendekati kuantitas yang tidak diketahui atau kuantitas-kuantitas tertentu.

Kedua perbedaan karakteristik dari FEM dengan prosedur numerik lain adalah digunakannya formulasi integral. Suatu fungsi tanpa batasan kejadian awal atau patokan awal juga dapat dicari dengan menggunakan metode Galerkin. Sebagai batasan kejadian kedua digunakan integral bagian-perbagian yaitu d^2y/dx^2 .

Pada analisis medan elektromagnet statis, fungsi yang diminimasi adalah energi elektrostatik:

$$W = \frac{1}{2} \int_v \epsilon E^2 dv \dots\dots\dots (23)$$

Dalam volume terbatas. Persamaan (23) dapat pula diekpresikan dengan potensial elektrostatik V sebagai berikut:

$$W = \frac{1}{2} \epsilon \int_v \left[\left[\frac{\partial V}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial V}{\partial y} \right]^2 \right] dv$$

Metode Galerkin termasuk golongan dari metode residual

pembebanan, penyelesaiannya diperoleh dari pembebanan residual persamaan diferensial. Misalnya persamaan diferensial dengan domain Ω :

$$\mathcal{L}\phi=f \quad \dots\dots\dots (24)$$

Dengan batasan kondisi pada Γ . \mathcal{L} adalah operator diferensial, f adalah fungsi eksitasi daya dan ϕ adalah kuantitas yang tidak diketahui. Metoda Galerkin mengasumsikan ϕ merupakan aproksimasi solusi untuk persamaan (23) substitusi ϕ ke $\mathcal{L}\phi$ pada persamaan (23) dan hasil akhirnya tidak boleh nol.

$$\mathbf{r} = \mathcal{L}\phi - f \neq \mathbf{0} \quad \dots\dots (25)$$

Pendekatan terbaik adalah saat ϕ bergerak turun dari residual \mathbf{r} dengan nilai terakhir pada semua nilai di titik Ω . Metode residual pada berbagai kondisi dapat dinyatakan dengan,

$$R_i = \int_{\Omega} w_i r d\Omega = 0 \quad \dots\dots (26)$$

Dimana R_i menyatakan residual integral pembebanan dan w_i merupakan fungsi yang dipilih. Pada metode Galerkin, fungsi pembebanan juga dapat dipilih dari ekspansi dari pendekatan solusinya. Hal ini biasanya berperan penting pada ketepatan solusi dan merupakan pendekatan yang sangat populer dalam perkembangan persamaan elemen hingga (*finite element equation*). Misalnya ada persamaan:

$$\phi = \sum \mathbf{c}_j \mathbf{v}_j = \{\mathbf{c}\}^T \{\mathbf{v}\} = \{\mathbf{v}\}^T \{\mathbf{c}\} \dots(27)$$

dan fungsi pembebanan yang dipilih adalah:

$$w_i = v_i \quad I = 1, 2, 3, 4, 5, \dots\dots\dots, N$$

sehingga persamaan (26) menjadi:

$$R_i = \int_{\Omega} (v_i \{\mathbf{v}\}^T \{\mathbf{c}\} - v_i f) d\Omega = 0$$

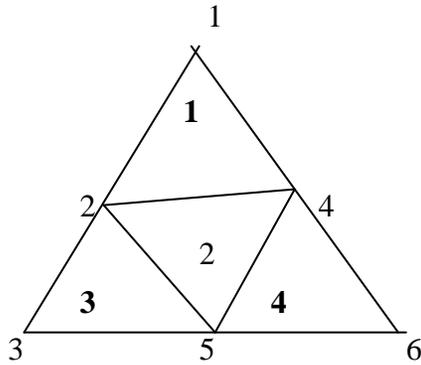
$$I = 1, 2, 3, \dots\dots, N \quad \dots\dots (28)$$

Matrik yang dihasilkan adalah

$$[\mathbf{S}]\{\mathbf{c}\} = \{\mathbf{b}\} \quad \dots\dots (29)$$

Analisis Elemen Hingga dua dimensi

(Jin, 1993:77-93) Langkah pertama dalam metode element hingga adalah membagi-bagi area domain Ω menjadi beberapa bagian element dua dimensi, misalnya dengan elemen segi tiga (*triangular element*). Bagian-bagian dari elemen-elemen itu ditata sedemikian rupa sehingga memenuhi area domainnya dan tidak satupun element-element tersebut bertumpuk. Tiap element diberi tanda nomor integer atau semacamnya untuk menandai banyaknya element dan tiap ujung dari element-element juga diberi nomor yang berbeda untuk menandai titik ujungnya (*vertice*). Nomor-nomor tersebut juga dipakai untuk menandai posisi dari tiap elemen dalam domain. Element segi tiga memerlukan $3 \times M$ integer array yang menandai titik global, titik lokasi dan nomor elemennya. Contohnya dengan $n(i,e)$, dimana $i = 1, 2, 3, \dots$ Dan $e = 1, 2, 3, \dots, M$, dengan M menyatakan jumlah dari elemen. Notasi $n(i,e)$ mempunyai arti koneksitas array, i menandai titik lokal, e adalah nomor elemen dan $n(i,e)$ adalah global nomor dari suatu titik. Misalnya suatu domain digambarkan sebagai berikut:



Gambar 1. Bagian element-elemen dalam domain dua dimensi

Pada gambar 1. terdapat 4 elemen dan 6 titik. Aray $n(i,e)$ dapat diberi nomor:

e	$n(1,e)$	$n(2,e)$	$n(3,e)$
1	2	4	1
2	5	4	2
3	3	5	2
4	5	6	4

Jelas penomoran diatas tidak unik. Misalnya tiga titik untuk elemen pertama 4, 1, 2 atau 1, 2, 4 selama urutan perputarannya tidak berubah maka titik-titik tersebut dianggap konsisten. Dianggap tidak konsisten bila urutan putarannya berubah misal menjadi 1, 4, 2 dan harusnya 2, 4, 1 (seperti putaran searah jarum jam).

Tiap elemen bagian dari domain dihitung mewakili nilai vektornya sendiri-sendiri. Menurut Jin(1993) untuk mendiskripsikan data-data tersebut dalam bentuk element hingga diperlukan antara lain:

1. x_i dan y_i ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) sebagai koordinat dari tiap titik, dimana N menyatakan total nomor dari titik.
2. Nilai dari $\alpha_x, \alpha_y, \beta$ dan f untuk tiap element.
3. Nilai dari p untuk titik vektor yang ditempatkan pada tiap elemen Γ_1 .
4. Nilai γ dan q pada segmen yang menyatakan kejadiannya dengan Γ_2 .

Interpolasi Element

Setelah domain di diskritisasi, diperlukan pendekatan (aproksimasi) untuk fungsi yang tidak diketahui Φ pada tiap elemen, dan ini merupakan langkah kedua dari analisis. Untuk element segi tiga yang linear, fungsi yang tidak diketahui Φ pada tiap element didekati dengan:

$$\Phi(x, y) = a^e + b^e x + c^e y$$

Dimana $a^e, b^e,$ dan c^e adalah koefisien konstan yang dicari dan e adalah nomor elemen. Pada element segi tiga linier terdapat tiga titik ujung. Gambar 2. dapat diasumsikan sebuah segi tiga yang mempunyai urutan putaran nomer 1, 2, dan 3, bila dihubungkan dengan nilai Φ dan diberi tanda Φ^e_1, Φ^e_2 dan Φ^e_3 , ketiga titik itu akan didapatkan:

$$\Phi^e_1 = a^e + b^e x^e_1 + c^e y^e_1$$

$$\Phi^e_2 = a^e + b^e x^e_2 + c^e y^e_2$$

$$\Phi^e_3 = a^e + b^e x^e_3 + c^e y^e_3$$

Untuk mencari nilai koefisien konstan dari $a^e, b^e,$ dan c^e dalam bagian dari Φ^e_j ,

dan mensubstitusikannya kedalam persamaan diatas menjadi:

$$\Phi^e(x, y) = \sum_{j=1}^3 N^e_j(x, y) \Phi^e_j$$

Dimana $N^e_j(x, y)$ adalah interpolasi atau ekspansi fungsi yang diberikan oleh:

$$N^e_j(x, y) = \frac{1}{2\Delta^e} (a^e_j + b^e_j x + c^e_j y), \quad j = 1, 2, 3$$

dengan:

$$\begin{aligned} a^e_1 &= x^e_2 y^e_3 - y^e_2 x^e_3 & b^e_1 &= y^e_2 - y^e_3 \\ a^e_2 &= x^e_3 y^e_1 - y^e_3 x^e_1 & b^e_2 &= y^e_3 - y^e_1 \\ a^e_3 &= x^e_1 y^e_2 - y^e_1 x^e_2 & b^e_3 &= y^e_1 - y^e_2 \end{aligned}$$

$$c^e_1 = x^e_3 - x^e_2$$

$$c^e_2 = x^e_1 - x^e_3$$

$$c^e_3 = x^e_2 - x^e_1$$

dan

$$\Delta^e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x^e_2 & y^e_3 \\ 1 & x^e_2 & y^e_3 \\ 1 & x^e_2 & y^e_3 \end{vmatrix}$$

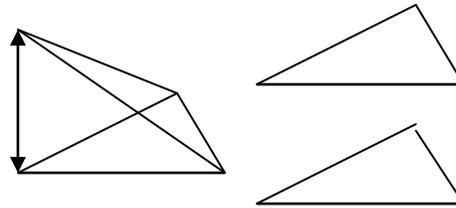
$$= \frac{1}{2} (b^e_1 c^e_2 - b^e_2 c^e_1)$$

= Area dari elemen ke- e

x^e_j dan y^e_j ($j = 1, 2, 3$) menandai nilai koordinat titik ke- j dalam elemen ke- e . hal ini dapat dibuat fungsi interpolasinya sebagai berikut:

$$N^e_i(x^e_j, y^e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Dan sebagai gambaran fungsi interpolasi dari N^e_j untuk elemen segi tiga adalah sebagai berikut:



Methode Galerkin untuk elemen segi tiga

HIPOTESIS

Dengan menggunakan *finite element method* (FEM) untuk diskretisasi persamaan Maxwell diharapkan menghasilkan penyelesaian secara numerik untuk perhitungan medan radiasi elektromagnetik pada antena.

CARA PENELITIAN

Bahan

Perangkat lunak hasil implementasi penyelesaian numerik persamaan Maxwell dengan pendekatan *finite element method* (FEM) dan data-data referensi untuk bahan pendukung penyusunan kode.

Alat

Alat yang dipakai pada penelitian ini adalah :

1. Komputer pribadi dengan prosesor Pentium III 500 MHz dengan RAM 256 MB dan printer.
2. Perangkat lunak Matlab 5.3.1 untuk menyusun program (*code*) utama dan juga untuk visualisasi data.

Jalan Penelitian

Penelitian yang dilakukan adalah studi pustaka dan langkah-langkah penelitian yang dilakukan adalah seperti berikut :

1. Mengumpulkan bahan referensi/ literatur di perpustakaan dan internet.
2. Mempelajari bahan referensi dan perencanaan algoritma program numerik.
3. Penyusunan kode program (*source code*) dengan bahasa Matlab.
4. Menjalankan program
5. Mengolah hasil dan membuat visualisasi dengan perangkat lunak Matlab.
6. Menyusun pembahasan
7. Menyusun laporan

Analisis Hasil.

Berdasar hasil perhitungan numerik menggunakan metode *finit element methode* (FEM) juga metode perhitungan beda hingga dibuat perbandingan tentang akurasi (jawaban analitis atau jawaban numerik yang sudah tervalidasi dicari sedapat mungkin dari referensi). Visualisasi digunakan untuk memberi gambaran medan radiasi elektromagnetik antenna dipol dan perolehan antenna (vektor pointing) sehingga dapat memperkirakan jarak yang relatif aman antara manusia dengan sumber radiasi medan elektromagnetik sesuai dengan petunjuk IEEE.

SIMPULAN

Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari penelitian ini adalah seperti berikut.

1. Metode Elemen Hingga untuk penyelesaian numerik pada radiasi elektromagnetik cara kerjanya mirip dengan aliran radiasi panas pada bahan.
2. Hasil secara riil belum dapat digambarkan secara jelas dan nyata karena masih ada beberapa parameter yang belum tepat.
3. Pemodelan yang ada masih terbatas pada sistem statis frekuensi rendah, untuk frekuensi tinggi masih memerlukan penentuan domain agar prediksi medan listrik dan medan magnet bisa tepat.

Saran

Dalam pemodelan radiasi antenna dipole masih perlu pertimbangan parameter-parameter yang paling dominan saja. Untuk parameter yang sesungguhnya masih perlu penelitian yang seksama.

DAFTAR PUSTAKA

Cingoski, Vlatko, 1996, *Study on Improved Three Dimensional Electromagnetic Field Computations Utilizing Vector Edge Finite Elements*, Ph.D Dissertation, Hiroshima University.

- Chaffin, David J., 1997, *A Taylor weak statement finite element Method for Computational Fluid Dinamik*, Dissertation, University of Tennessee, Knoxville
- Edelvik, Frederik, 2000, *Finite Volume Solvers for The Maxwell Equations in Time Domain*, Licentiate Thesis no. 20000-05, Uppsala University.
- Guru, Bhag Singh, and Hiziroğlu, Hüseyin R., 1998, *Elektromagnetik Field Theory Fundamentals*, International Thomson Publishing Company, Singapore, pp. 278-283, 473-501, 511-528.
- Heurtaux, Frederick, et. al., 1992, *Scale Decomposition in Burgers' equation*, preprint.
- Hockanson, D. Martin, 1994, *The Finite Difference Time Domain Method and Applications in Electromagnetic Compatibility*, Master Thesis TR94-3-014T, Department of Electrical Engineering University Missouri-Rolla.
- Jameson, Leland, 1993, *On The Daubechies-Based Wavelet Differentiation Matrix*, ICASE Report, NASA Langley Research Center.
- Jin, Jianming, 1993, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, John Wiley & Sons, New York
- Liang Chi Shen, Jin Au Kong, 1987, *Applied Electromagnetism, (Third Edition)*, Tomson Publishing Inc, Houston
- Madsen, Niel K. and Ziolkowski, Richard W., 1990, *A 2D Modified Finite Volume Technique For Maxwell's Equations*, Report, Lawrence Livermore National Laboratory.
- Nystrom, James F., 2000, *On The Design of Time Stable High-Order Cartesian-Based Collocated FDTD CEM Methods*, Master Thesis, Electrical Engineering University of Idaho.
- Perella, Andrew James, 1996, *A Class of Petrov-Galerkin Finite Element Methodes for the Numerical Solution of the Stationary Convectin-Diffusion Equation*, Thesis, Departement of Matematical Science, University of Durham
- Schneider, R., Levin, P.L, and Spasojevic, M., 1996, *Multiscale Compression of BEM Equations for Electrostatic Systems*, IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation, Vol. 3, No. 4, August 1996.
- Segerlind, Larry J. 1984, *Applied Finite Element Analysis, (Scnd Edition)*, John Wiley & Sons, New York, pp. 11
- Shi, Hao, 1995, *Study of Printed Circuit and Waveguide Coupler Discontinuities with an FDTD-*

Discrete Surface Integral, Master Thesis, University of Missouri Rolla.

Yang, Baolin, 1998, *Spectral Methods and Absorbing Boundary Conditions for Maxwell's Equations*, Ph.D Thesis, Division of Applied Mathematics Brown University

Weaver Jr, William and Paul R. Johnston, 1993, *Elemen Hingga untuk Analisis Struktur*, (terjemahan : Ir. Markus Rubijanto Kusuma), PT Eresco, Bandung.

Shen, Liang Chi and Jin Au Kong, 2001, *Aplikasi Elektromagnetik*, (Terjemahan: Iwa Garniwa), Erlangga, Jakarta.pp. 173-205.